شبیه سازی مستقیم عددی جریان لایه مرزی دوبُعدی و غیر قابل تراکم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده

محمدجواد مغربی[1]، مجید فیض‌آبادی فراهانی[2] واحد ضرغامی[3]

چکیده

معادله بی‌بعد شده ناویر- استوکس در فرم چرخشی برای جریان لایه مرزی دو بعدی صفحه‌ای به روش مستقیم عددی حل شده است. با در نظر گرفتن پروفیل سرعت در ورودی دامنه محاسباتی، از ضخامت لایه مرزی به عنوان طول مشخصه و از سرعت یکنواخت محیط بعنوان سرعت مشخصه به منظور بی بعد سازی استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده در جهات اصلی جریان و عمود بر جریان گسسته شده‌اند. از یک نگاشت جبری برای تبدیل دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی استفاده شده است. جهت توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. نتایج شبیه سازی این نوع جریان، با حل بلازیوس مقایسه شده، که صحت کد را نشان می‌دهد. در این مطالعه مشخصه‌های جریان لایه مرزی آرام نیز جهت ارزیابی صحت کد، امتحان و با تقسیم کردن طول‌ها و سرعت‌ها به ترتیب با ضخامت لایه مرزی و سرعت یکنواخت محیط، پروفیل‌ها و کانتورهای سرعت و گردابه در دستگاه مختصات بی بعد رسم و خود تشابهی در آنها مشاهده شده است.

واژه‌های کلیدی: شبیه سازی مستقیم عددی، جریان لایه مرزی، تفاضلات محدود فشرده، معادلات ناویر- استوکس، خودتشابهی

۱- مقدمه

به طور خلاصه می‌توان گفت: وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت می‌کند تأثیر شرط عدم لغزش به صورت تنش برشی در آن آشکار می‌شود و سپس این اثر به داخل جریان نفوذ می‌کند، که اندازه نفوذ این اثر بستگی به عدد رینولدز جریان دارد. در روی یک صفحه تخت اثر لزجت در $Re > 1000$ به لایه نازک در نزدیکی مرز به نام لایه مرزی محدود می‌شود که در این لایه سرعت در یک ضخامت کم از صفر تا اندازه سرعت در جریان پتانسیل خارج لایه مرزی تغییر می‌کند[۱].

تاکنون روشهای مختلفی برای حل جریان لایه مرزی ارائه شده است، که تقریباً در اکثر این روشها با ساده‌سازی معادلات ناویر- استوکس همراه بوده است. حل عددی کامل معادلات ناویر- استوکس وابسته به زمان، شبیه‌سازی مستقیم عددی[1] نامیده می‌شود، که بطور کلی در آن همه مقیاس‌های مهم جریان را بدون استفاده از مدلهای آشفتگی محاسبه می‌کنند و هیچگونه ساده‌سازی و یا مدل‌سازی در آن وارد نمی‌شود و به همان صورتی که تعریف شده حل عددی شده، که منتج به نتایج بسیار دقیق می‌شود[۲].

پایه و اساس روش شبیه سازی مستقیم عددی در جریان لایه مرزی برای نخستین بار توسط اورزاگ و پترسون[2] (۱۹۷۲) بنا نهاده شد، آنها برای شبیه‌سازی عددی مستقیم لایه مرزی در عدد رینولدز ۳۲، از روش طیفی[3] استفاده کرده بودند [۳]. گام مهم بعدی توسط روگالو[4] (۱۹۸۱) برداشته شد، او با استفاده از بسط و توسعه الگوریتم محاسباتی اورزاگ و پترسون، معادلات حاکم بر جریان توربولانس را به روش مستقیم عددی محاسبه نمود و نتایج بدست آمده را

مقاله در تاریخ ۸۶/۹/۷ دریافت و در تاریخ ۸۶/۱۲/۱۳ به تصویب نهایی رسید.

[1] **استادیار**، دانشگاه صنعتی شاهرود (نویسنده مسئول)

پست الکترونیکی: javad@shahroodut.ac.ir

[2] **دانشجوی کارشناسی ارشد**، تبدیل انرژی دانشگاه صنعتی شاهرود

[3] **دانشجوی کارشناسی ارشد**، تبدیل انرژی دانشگاه صنعتی شاهرود

با نتایج آزمایشگاهی و چندین روش توربولانس دیگر مقایسه نمود[۴]. در آنها سالها بعلت ضعف کامپیوترها جریان به صورت همگن و تنها در یک جهت مورد مطالعه توسط این روش قرار می‌گرفت، و اجازه استفاده از روش مستقیم عددی را در جریان توربولانس در نزدیکی جداره را، به کاربر نمی‌داد. در سال (۱۹۸۷) کیم و معین[۵] با شبیه سازی مستقیم عددی جریان سیال را در داخل یک کانال با دیواره‌های موازی، مورد مطالعه قرار دادند [۵]، که پس از مقایسه عددی نتایج شبیه سازی با نتایج تجربی کرپلین و اکمن[۶] (۱۹۷۹) [۶] مطابقت بسیار خوبی را دریافت نمودند. اسپالارت[۷] (۱۹۸۸) توسط یک روش ابتکاری در DNS توانست، جریان لایه مرزی توربولانس را تحت گرادیان فشار صفر و مطلوب محاسبه نماید[۷]. درسالهای اخیر از جمله مطالعات انجام شده توسط این روش می‌توان به مطالعه جریان مختلط توسط لی و معین[۸] (۱۹۹۴)[۸] و مطالعه بر روی پدیده جدایش در جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه مسطح توسط نا و معین[۹] (۱۹۹۶) [۹] اشاره نمود.

اما مطالعه بر روی جریان لایه مرزی تراکم پذیر با استفاده از شبیه‌سازی مستقیم عددی نخستین بار توسط فریسن[۱۰][۱۰] آغاز شد، ولی مطالعات جدی تر، به خاطر پیچیدگی‌های آن تا سالها مسکوت مانده بود و امروزه یکی از شاخه‌های مطالعات دانشمندان و کاربردهای ابر کامپیوترها می‌باشد.

با وجود دقت بالا این روش در مقایسه با مدل‌سازی‌های مرسوم، به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترهای امروزی، محاسبات DNS تنها منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و بنابراین استفاده از DNS در جریان آشفته منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدل‌سازی می‌باشد.

به عنوان مثال برای انجام محاسبات DNS برای یک جریان ساده در کانال به ابعاد۱/۱۰*۱/۱۰*۱/۱۰ متر و در رینولدز بالا گردابه‌های به ابعاد ۱۰- ۱۰۰ میکرومتر تشکیل خواهند شد و بنابراین به شبکه محاسباتی با $۱۰^{۶}$ تا $۱۰^{۱۲}$ گره احتیاج است که بتواند همه فرآیند آشفتگی جریان را مشخص کند، از طرف دیگر سریعترین تغییرات در چنین جریانی فرکانسی، در مرتبه۱۰ کیلو هرتز دارد که نیاز است معادلات در بعد زمان با استفاده از قدمهای زمانی ۱۰۰ میکروثانیه گسسته سازی شوند. همچنین برای محاسبه DNS داخل لوله در عدد رینولدز ۵۰۰۰۰۰ به کامپیوتری احتیاج است که توان محاسباتی ۱۰ میلیون بار بیشتر از سریعترین کامپیوترهای cray موجود، داشته باشد. به این ترتیب احتیاج به مدل‌سازی جریان آشفته و استفاده از این مدل در انجام محاسبات تا سالها ادامه خواهد داشت و نیاز به تصحیح و طراحی مدلهای بهتر همچنان احساس می‌شود[۱۱].

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر استوکس ارائه شده توسط مغربی [۱۲] را به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل‌سازی و یا ساده‌سازی به صورت عددی حل می‌کنیم.

فرم بی بعد معادله ناویر- استوکس برای جریانهای غیر قابل تراکم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}.\nabla)\mathbf{U}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\mathbf{U}) \qquad (۱)$$
$$\nabla.\mathbf{U}=0$$

با توجه به رابطه برداری زیر:

$$\nabla(\mathbf{A}.\mathbf{B})= \qquad (۲)$$
$$(\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

برای مورد $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{U}=(U,V,W)$، داریم:

$$(\mathbf{U}.\nabla)\mathbf{U}=\omega\times\mathbf{U}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{U}.\mathbf{U}) \qquad (۳)$$

که در آن $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\nabla\times\mathbf{U}$

با در نظر گرفتن روابط (۱) و (۳) به رابطه (۴) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}=\mathbf{H}-\nabla\left(p+\frac{\mathbf{U}.\mathbf{U}}{2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\mathbf{U}) \qquad (۴)$$

که در آن، $\mathbf{H}=(H_1,H_2,H_3)=\mathbf{U}\times\omega.$

با ضرب طرفین معادله (۴) در بردارکرل $(\nabla\times)$ داریم:

$$\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{U})}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H} \qquad (۵)$$
$$-\nabla\times\nabla\left(P+\frac{\mathbf{U}.\mathbf{U}}{2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\times\mathbf{U})$$

از طرفی می‌دانیم که $\nabla(scalar)=0$ می‌باشد. در نتیجه معادله (۵) به فرم معادله (۶) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \omega \qquad (۶)$$

با تکرار عمل ضرب بالا در معادله (۶) به معادله زیر خواهیم رسید

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})) \qquad (۷)$$

با بکار بردن معادله پیوستگی $(\nabla.\mathbf{U}) = 0$ و رابطه ریاضی (۸)،

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla(\nabla.\mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U} \qquad (۸)$$

به فرم محاسباتی (۹) خواهیم رسید

$$\frac{\partial \nabla^2 \mathbf{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 \mathbf{U} \qquad (۹)$$

که $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega$ عبارت‌های غیرخطی هستند.

عمده مزیت استفاده از این فرم معادلات ناویر- استوکس، اولا کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای محاسباتی مورد نیاز و ثانیا عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مساله می‌باشد. در عین حال در مقابل این دو مزیت، تغییر درجه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را باید تجربه کرد.

در معادله (۹) بردار سرعت U به دو قسمت جریان پایه[11] $(U_0(y),0)$ و متغیرهای محاسباتی $(u(x,y,t),v(x,y,t))$ به فرم معادلات (۱۰) تجزیه می‌گردد.

$$\mathbf{U} = (U,V) = U\hat{i} + V\hat{j} \qquad (۱۰)$$
$$U(x,y,t) = u(x,y,t) + U_0(y)$$
$$V(x,y,t) = v(x,y,t)$$

همچنین با توجه به تعریف بردار H مقادیر H_1 و H_2 بصورت معادلات (۱۱) بدست می‌آید.

$$H_1 = V\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \qquad (۱۱)$$
$$H_2 = -U\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

با اعمال آن همراه با معادلات (۱۰) در فرم محاسباتی، معادله ناویر- استوکس (۹) به معادله (۱۲) دست خواهیم یافت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_2 + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 U \qquad (۱۲)$$

این معادله برای پیشروی محاسبات در دامنه زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مولفه سرعت در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۱۳)$$

۳- شرایط مرزی

بدلیل اینکه معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل می‌شوند شرایط مرزی بر روی متغیرهای محاسباتی اعمال می‌شوند. معادله (۱۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار می‌باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی و مرز خروجی مجموعه محاسباتی مشخص می‌باشد. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، $\partial u/\partial x$ هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می‌باشند. این شرایط مرزی به شرایط دریشله[12] و نیومن[13] معروف می‌باشند.

در شبیه سازی، مولفه سرعت لحظه‌ای در جهت جریان اصلی در ورودی می‌تواند به صورت یک پروفیل چند جمله‌ای بصورت معادله (۱۴) و یا پروفیل چند تکه‌ای بصورت (۱۵) استفاده نمود.

$$U(y) = 0.332y - 0.00023y^4 + 1.998\times10^{-3} y^7 - 1.571\times10^{-7} y^{10} + 1.13\times10^{-9} y^{13} \qquad (۱۴)$$

$$U(y) = \begin{cases} 1.8y - 1.9683y^4 & \left(0 \le y \le \frac{4}{9}\right) \\ 1 - 0.81(1-y)^2 & \left(\frac{4}{9} \le y \le 1\right) \\ 1 & (\mathrm{y} \ge 1) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

در مرز خروجی هم از یک شرط مرزی جابجایی[14] استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچگونه برگشت جریان و یا وجود تاثیرات خروجی به داخل شبکه محاسباتی داشته باشیم. در این مرز از معادله جابجایی برای تولید شرط

مرزی دریشله برای هر دو مولفه سرعت استفاده می‌کنیم که معادله آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۱۶)$$

در این معادله، مولفه‌های سرعت u و v جایگزین ψ می‌گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. مقدار c بین صفر و یک می‌باشد. البته مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی در مجموعه محاسباتی تعیین شود[۱۲].

۴– شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه سازی جریان لایه مرزی همراه با اغتشاشات، نتیجه بدست آمده از جریان لایه مرزی دو بعدی در حالت پایدار زمانی می‌باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه می‌باشد و هیچگونه اغتشاش نداریم. در لایه مرزی پایدار زمانی در گره‌های مختلف بعد از گذشت زمان، مقدار سرعت در آن دیگر تغییر نمی‌کند و مستقل از زمان و پایدار می‌گردد.

۵– شبکه سازی (محدود کردن دامنه y)

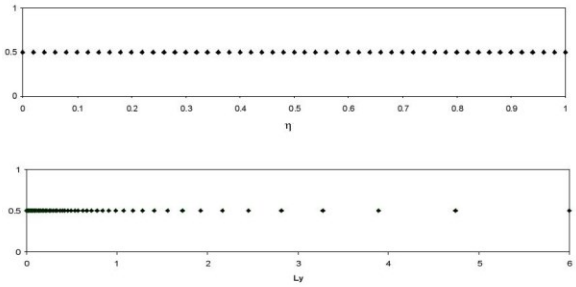
در جریانهای توأم با تمرکز گرادیانهای بزرگ، در نواحی خاص برای نشان دادن خواص جریان به دقت بیشتری نیاز است. به عنوان مثال، جریان سیال لزج در نزدیکی دیواره‌ها دارای گرادیان بزرگی است. محاسبه دقیق گرادیان جریان در این نواحی نیاز به تعداد زیادی نقطه در شبکه قلمرو حل دارد. به جای استفاده از شبکه‌ای با توزیع یکنواخت در قلمرو فیزیکی، نقاط شبکه را می‌توان در نواحی با گرادیان بالا به صورت متراکم درآورد که در نتیجه آن تعداد کل نقاط شبکه کاهش می‌یابد و راندمان بالا می‌رود.

در این پژوهش نگاشت جبری[۱۵] با امکان ایجاد تراکم، بصورت معادله (۱۷) استفاده شده است. قابل ذکر است این شبکه برای محاسبات لایه مرزی مناسب است که به تراکم نقاط در نزدیکی سطوح جامد نیاز دارد. این عمل باعث صرفه جویی در هزینه محاسبات خواهد شد. این نگاشت جبری ، دامنه فیزیکی $0 \le y \le L_y$ را به دامنه محاسباتی $0 \le \eta \le 1$ نگاشت می‌کند. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می‌باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه‌ای بیشتر متمرکزند.

$$y = (L_y y_0 \eta)/(y_0 + L_y(1-\eta)) \qquad (۱۷)$$

که در این رابطه y_0 پارامترنگاشت است و میزان کشیدگی را تعیین می‌کند.

در شکل (۱) می توانیم توزیع شبکه را بر روی شبکه کشیده شده با $y_0 = 0.5$, $\mathrm{L_y} = 6$, $\mathrm{N_y} = 50$ با نگاشت ذکر شده، مشاهده نمود.



شکل ۱ مقایسه قلمروهای فیزیکی و محاسباتی

مشتقات در فواصل فیزیکی به وسیله قانون زنجیره‌ای به هم مرتبط می‌شوند. عبارتهای مشتق اول، دوم و چهارم در فواصل فیزیکی تابعی از مشتقات در دامنه محاسباتی به صورت زیر می‌باشد.

$$\therefore \frac{d}{dy} = \eta_y \frac{d}{d\eta}$$
$$\therefore \frac{d^2}{dy^2} = \eta_{yy}\frac{d}{d\eta} + \eta_y^2 \frac{d^2}{d\eta^2}$$
$$\therefore \frac{d^4}{dy^4} = \eta_{yyyy}\frac{d}{d\eta} + 6\eta_y^2\eta_y y\frac{d^3}{d\eta^3}$$
$$+(4\eta_y\eta_{yyy} + 3\eta_{yy}^2)\frac{d^2}{dy^2} + \eta_y^4\frac{d^4}{d\eta^4}$$
(۱۸)

۶– مراحل انجام محاسبات

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه به صورت زیر است:

۱- با توجه به شرط اولیه مشخص برای u و شرایط مرزی معلوم برای u و v و $\partial u / \partial x$، طبق

معادله پیوستگی، مقدار v برای داخل شبکه محاسبه می‌شود.

۲- با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times \mathbf{U}$ است و برای حالت دو بعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است، مقدار $\omega_3 = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ محاسبه می شود.

۳- جمله غیرخطی $\mathbf{H}$ مطابق تعریف برابر $\mathbf{H} = \mathbf{U} \times \omega$ می‌باشد که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است و مقادیر $H_1 = V(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y})$ و $H_2 = -U(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y})$ محاسبه می شوند.

۴- ترم‌های غیرخطی در معادله ناویر- استوکس به صورت $(\partial^2 H_1 / \partial y^2) - (\partial^2 H_2 / \partial x \partial y)$ می‌باشد و محاسبه می‌شوند.

۵- ترم‌های لزجتی که در معادله بصورت $(1/\mathrm{Re})\nabla^4 U$ ظاهر شده‌اند محاسبه می‌شوند. توجه شود که با توجه به معادله پیوستگی، شرط مرزی $\partial u / \partial x = -\partial v / \partial y$ محاسبه و در آن اعمال شود.

۶- قبل از مبادرت به تجدید مقدار u، بایستی شرایط مرزی ورودی و خروجی را محاسبه کنیم. در مرز ورودی این شرط بصورت یک تابع که در موقعیت های عرضی مختلف می تواند بصورت تابعی از زمان تغییر کند معرفی می شود و در مرز خروجی با استفاده از شرط جابجائی بوجود می آید.

۷- بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر- استوکس، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم مقدار $\nabla^2 u$ محاسبه می شود.

۸- با مشخص شدن $\nabla^2 u$، طبق مقاله بارتلز [۱۳] با حل معادله پواسون، مقدار u استخراج می شود.

۹- تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه جدید در مراحل زمانی بعدی استفاده می شود.

۷– مشتق گیری و پیشروی محاسبات در دامنه زمان

مشتقات مادی با بکار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ارائه شده توسط لیله [۱۴] محاسبه شده است. لیله مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی مطابق معادله (۱۹) بیان کرده است.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha+2}{3\Delta x}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x}(f_{j+2} - f_{j-2}) \qquad (۱۹)$$

که درآن علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیانگر شماره گره $(0 \le j \le J)$ و $\Delta x = L_x /$ ، می‌باشد. اگر در معادله (۱۹)، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم.

در مرزها یعنی جایی که $j = 0$ یا $j = J$ است، از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

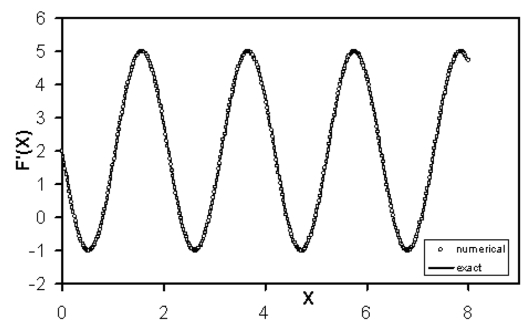
$$f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (۲۰)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \qquad (۲۱)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j = 1$ یا $j = J - 1$ است از معادله (۱۹) در حالتی که $\alpha = 1/4$ است، استفاده می‌شود.

همانطور که توسط لیلی بحث شده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله (۱۹) برای گره‌های $j = 2$ و $j = J - 2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$ را تضمین نمود.

در شکل (۲) مقایسه بین نتایج عددی مشتق اول و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + Cos(3x)$ را می‌توان ملاحظه نمود.



شکل۲ تقریب مشتق اول تابع $y = 2x + Cos(3x)$

طبق مقاله لیله معادله (۲۲) مشتق دوم تابع $f(x)$ را معرفی می‌کند که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha - 1}{12\Delta x^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \qquad (۲۲)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است.

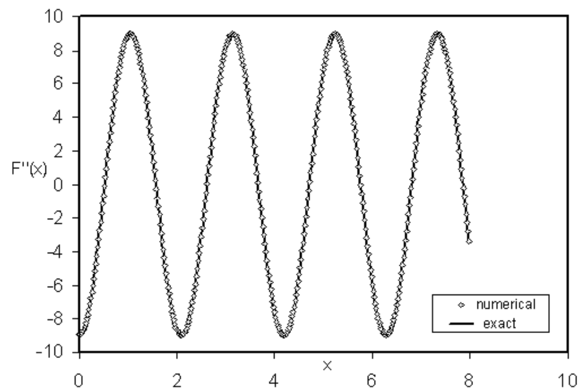
در مرزها از یک طرف مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f''_0 + 11f''_1 = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \qquad (۲۳)$$

$$f''_J + 11f''_{J-1} = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \qquad (۲۴)$$

نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j=1$ و $j=J-1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = 1/10$ در معادله (۲۲) بدست می‌آید.

در شکل (۳) مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + Cos(3x)$ را می‌توان ملاحظه نمود.



شکل۳ تقریب مشتق دوم تابع $y = 2x + Cos(3x)$

برای محاسبه مشتقات چهارم هم می‌توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد، که در طرف راست معادله ناویر استوکس و در قسمت ترم‌های لزجتی وجود دارد.

یک طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای [۱۵] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می‌شود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به صورت معادله (۲۵)، مطابق با جدول (۱) می‌توان فرایند را انجام داد.

جدول ۱ طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم

دومین موقعیت	اولین موقعیت	زمان
$R(u^n)$	u^n	t^n
$R' = R(u')$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$t' = t^n + c_1 \Delta t$
$R'' = R(u'')$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R)\Delta t$	$t'' = t' + (c_2 + d_2)\Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R')\Delta t$	$t^{n+1} = t^n + \Delta t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \qquad (۲۵)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt، طرف راست معادله باید در سه زیر- زمان محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به صورت $(c_i + d_i)\Delta t$ تقسیم شده است و u به وسیله یک ترکیب خطی از R در زیر- زمان حال و R در زیر- زمان گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان برابر Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب c و d می توان از یک سری تیلور استفاده نمود که نتیجه آن بصورت زیر است.

$c_1 = 8/15 \qquad d_1 = 0$

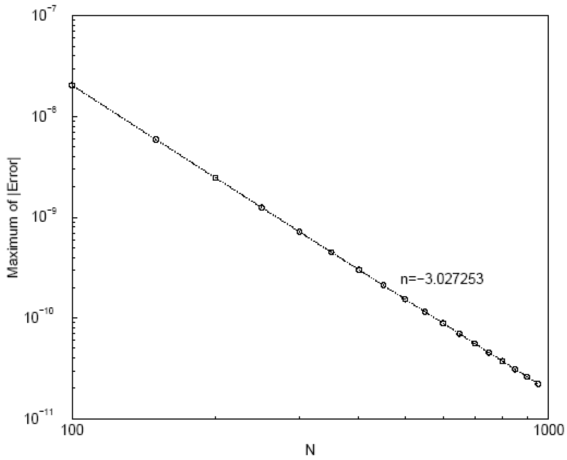
$c_2 = 5/12 \qquad d_2 = -17/60$

$c_3 = 3/4 \qquad d_3 = -5/12$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۲۶) است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \qquad (۲۶)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل دقیق در شکل (۴) رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد.



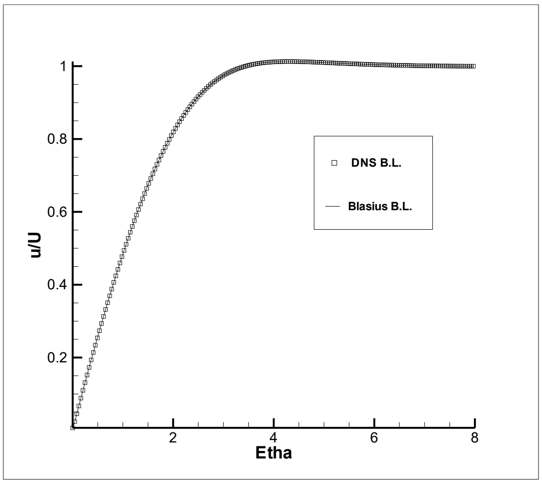
شکل ۴ مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای

$$\frac{du}{dt}=-u(t) \text{ با } u(0)=1. \text{ [۱۲]}$$

۸– نتایج حل DNS برای جریان لایه مرزی دو بعدی

۸–۱ معادله بلازیوس

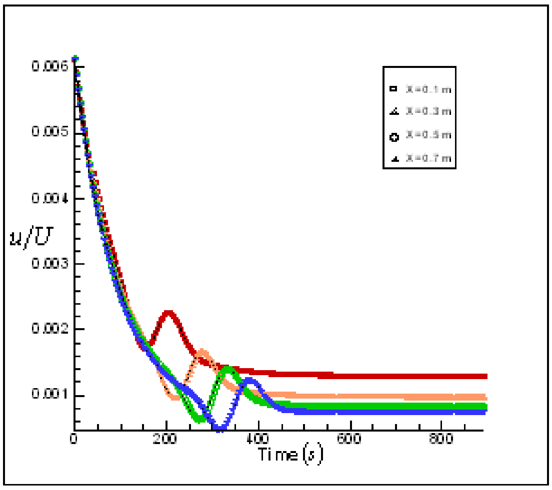
بلازیوس در سال ۱۹۰۸ حل لایه مرزی لایه‌ای روی یک صفحه تخت را پیدا کرد. ایشان با توجه به تشابهی که بین پروفیل‌های سرعت درکلیه مقاطع لایه مرزی وجود داشت، توانست با استفاده از یک متغیر نظیر h به جای دو متغیر x و y معادلات لایه مرزی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کند. معادله حاصله را نمی توان به شکل بسته حل نمود؛ بلازیوس آن را با استفاده از بسط سری نمایی حول $\eta=0$ ، که با بسط مجانبی برای $\eta\rightarrow\infty$ هماهنگ بود، حل کرد. همین معادله بعداً با دقت بیشتر مجدداً با استفاده از روش‌های عددی توسط هوارت[۱۶] [۱۶] حل شده؛ او نتایج را تا ۵ رقم اعشار بیان کرده است. با ترسیم u/U بر حسب η با توجه به نتایج هوارت و مقایسه آن با نتایج حل مستقیم عددی، در شکل (۵) صحت حل استفاده شده در این تحقیق آشکار می‌شود.



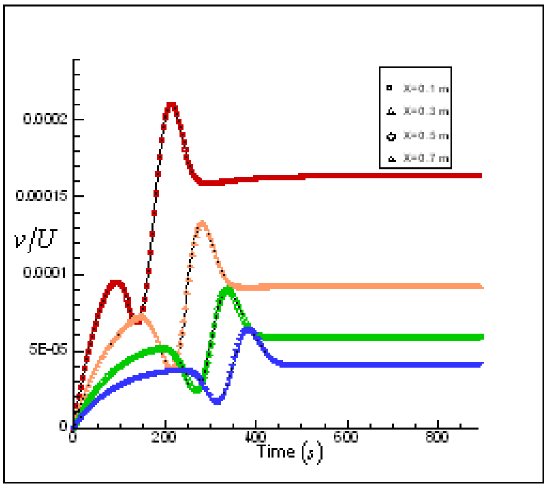
شکل ۵ مقایسه بین حل بلازیوس با روش DNS

۹– گذر زمانی

برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی، بدون اغتشاشات ورودی انتظار داریم که سرعت لحظه‌ای، در هر نقطه‌ای از دامنه، به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملاً و به وضوح در شکل‌های (۶) و (۷) نشان داده شده است.



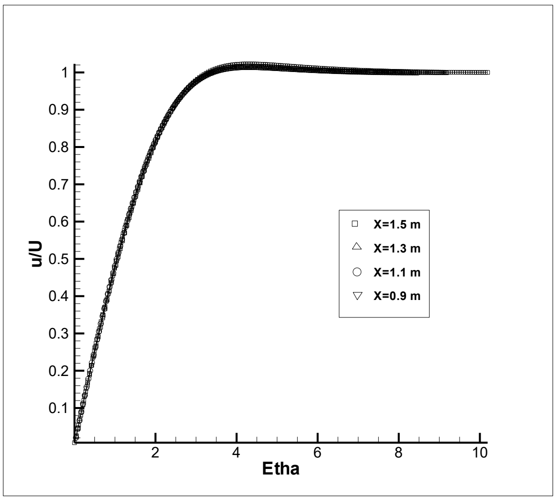
شکل ۶ گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u، در چهار فاصله مساوی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



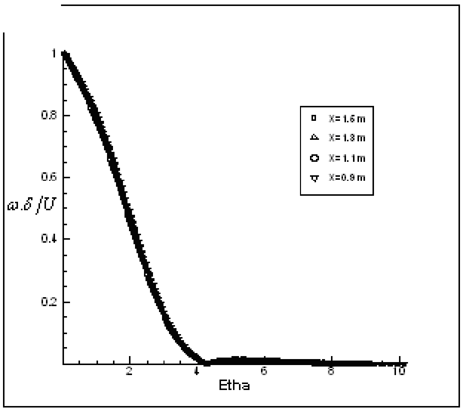
شکل ۷ گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v، در چهار فاصله مساوی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی

۱۰– خودتشابهی

رفتار خودتشابهی سرعت و گردابه جریان لایه مرزی آرام در شکل‌های(۸) و (۹) برای نقاط مختلف نشان داده شده است.

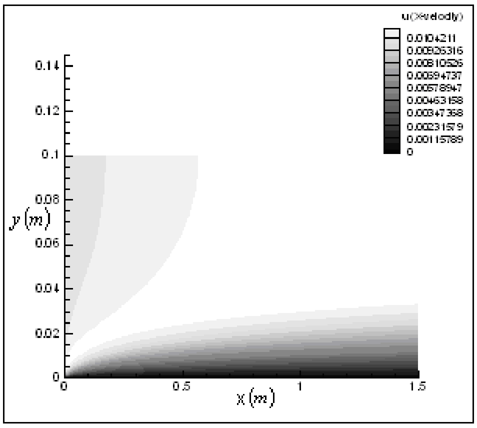


شکل ۸ پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی جریان

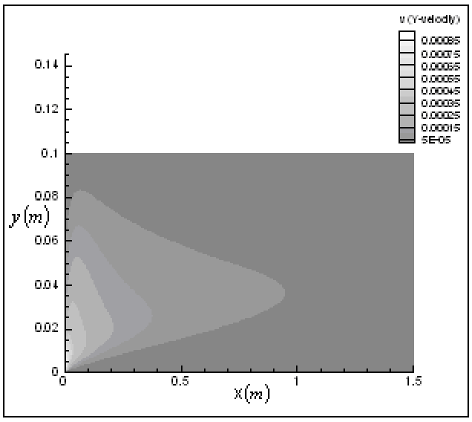


شکل ۹ پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی جریان

کانتورهای مولفه های سرعت



شکل ۱۰ کانتور مولفه افقی سرعت، u، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی

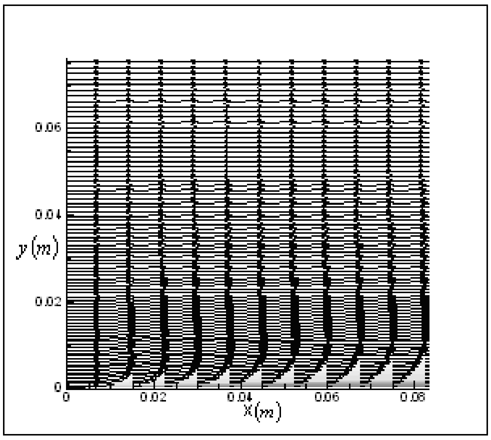


شکل ۱۱ کانتور مولفه عمودی سرعت، v، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی

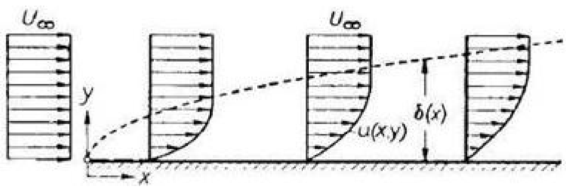
از نکات قابل توجه، که در کانتور مولفه عمودی سرعت، v، نشان داده شده است، آنستکه، v در لبه مرز صفر نمی‌باشد. این مسئله بعلت جابجایی جریان خارجی است. پنتون[17] (۱۹۸۴) [۱۷] درکتاب خود در این مورد بحث جالبی را آورده است، که بطور خلاصه می‌توان گفت که در گرادیان‌های موافق، جریان می‌تواند به سمت دیوار حرکت کند[۱].

۱۱– رشد ضخامت لایه مرزی

در شکلهای (۱۲) و (۱۳) رشد ضخامت جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی با توجه به حل DNS و نمای شماتیک حاصل از نتایج شلختینگ[18] [۱۸] مقایسه گردیده است.



شکل ۱۲ رشد جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی مطابق با حل DNS



شکل ۱۳ شماتیک جریان لایه مرزی توسعه یافته[۱۸]

۱۲– نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی جریان لایه مرزی صفحه‌ای غیر قابل تراکم به کمک شبیه‌سازی مستقیم عددی معادله ناویر- استوکس در فرم چرخشی پرداخته شد. این روش با حل عددی بلازیوس، انجام شده توسط هوارت، مقایسه شده است. پروفیل‌ها و کانتورهای سرعت در مقاطع مختلف، بدون هیچگونه اغتشاش ورودی بررسی شد، همچنین پدیده خودتشابهی در پروفیل سرعت و گردابه در جریان لایه مرزی نشان داده شده است.حال با توجه به صحت نتایج بدست آمده توسط این روش در جریان آرام، با استفاده از رایانه‌های سریعتر، می‌توان گام در مرحله بعدی یعنی بررسی دقیق جریان مغشوش نهاد، همچنین با تغییر شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات به بررسی هندسه‌های پیچیده‌تر مختلف مبادرت نمود.

۱۳– پی نوشت

[1] Direct Numerical Simulation (DNS)
[2] Orszag and Patterson
[3] Spectral methods
[4] Rogallo
[5] Kim and Moin
[6] Kreplin and Eckelmann
[7] Spalart
[8] Le and Moin
[9] Na and Moin
[10] Feiereisen
[11] Base flow
[12] Dirichlit Boundary Condition
[13] Neumann Boundary Condition
[14] Convective Outflow Boundary Condition
[15] Algebraic mapping
[16] Howarth
[17] Panton
[18] Schlichting

مراجع

[1] F.M. White, Viscous Fluid Flow, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, **2000**.
[2] J. Mathieu, J.Scott, An Introduction to Turbulent Flow, Cambridge University Press, **2000**.
[3] S.A. Orszag and G.S. Patterson, Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*,Vol 28, **1972,** pp 76–79.
[4] R.S. Rogallo, Numerical experiments in homogeneous turbulence. *NASA TM 81315*, **1981**.
[5] John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. of Fluid Mech.*,Vol 177, **1987,** pp 133 –166.

[6] H. kreplin. And H. Eckelmann , Behaviour of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow. Physics of Fluids, Vol 22, **1979**, pp 1233-1239.

[7] R. Spalart, Direct simulation of a turbulent boundary layer up to *R*e=1410 *J. Fluid Mech.*,Vol 187, **1988**, pp 61–98.

[8] Hung Le, Parviz Moin, and John Kim, Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. of Fluid Mech.* Vol 330, **1997**, pp 349–374.

[9] Yang Na and Parviz Moin, Direct numerical simulation of turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation. *Rep. TF-68, Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford*, **1996**.

[10] W.J. Feiereisen, W.C. Reynolds, and J.H. Ferziger, Numerical simulation of a compresssible,homogeneous turbulent shear flow. *Rep. TF-13, Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford*, **1981**.

[11] W.C. Reynolds, The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulations. In J.L. Lumley, editor, Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads, pages, **1990**, pp 313-343. Springer, New York.

[12] M.J. Maghrebi, A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three -Dimensional Planer Wake, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, **1999**.

[13] RH. Bartles, and G.W. Stewart, Solution of the Matrix Equation AX+XB=C, Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, **1972**.

[14] S.K. Lele, Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution, Journal of Computational Physics,Vol 103, **1992**, pp 12-16.

[15] A. Wray & M.Y. Hussaini, Numerical Experiments in Boundary Layer Stability, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 392, **1984**, pp 373-389.

[16] Howarth, L., On the solution of the Laminar Boundary – Layer Equation, Proceedings of the Royal Society of London , A164, **1983**, pp. 547-479

[17] Panton, R.L., Incompressible Flow, Wiley, New York, **1984**.

[18] H.Schlichting, and K.Gersten, Boundary Layer Theory, Springer-Verlag, 8th Edition, **2005**.